Cours 7

Exemples (suite)

- produit (directe)

  A_1, A_2 deux anneaux (comm. resp. unitaire)

  $\rightsquigarrow$ $A_1 \times A_2$ est naturellement un anneau (comm. resp. unitaire)

  Exo: . $A_1 \times \{0\}$ est idéal de $A_1 \times A_2$

  . $A_1 \times A_2 / A_1 \times \{0\} \cong A_2$

  Plus généralement, $(A_i)_{i \in I}$ famille d'ann

  $\rightsquigarrow$ $\prod_{i \in I} A_i$ anneau produit

  $$\prod_{i \in I} A_i \xrightarrow{p_i} A_i$$

  Propriété universelle $\forall B$ anneau

  $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}\left(B, \prod_{i \in I} A_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rings}}(B, A_i)$$

• (Idempotents)

Soit A un anneau

Soit $e \in A$ un <u>idempotent central</u> i.e. $\begin{cases} e^2 = e \\ e \cdot a = a \cdot e \quad \forall a \in A. \end{cases}$

Alors

$$\underset{\overset{\parallel}{Ae}}{eA} := \{ ea \mid a \in A \} \text{ est sous-anneau de } A$$

(en fait un idéal).

$$\left(\begin{array}{l} ea + ea' = e(a+a') \\ ea \cdot ea' = e \cdot e \cdot a \cdot a' = e \cdot (aa') \\ \vdots \end{array} \right)$$

Notons que si A est unitaire, alors $1-e$ est aussi un idempotent central

De plus,

$$A \cong eA \times (1-e)A$$
$$a \longleftrightarrow (ea, (1-e)a)$$

Plus généralement,

Si on a un système <u>complet</u> <u>d'idempotents</u> <u>centraux</u> <u>orthogonaux</u>

$$\left(\text{i.e. } e_1, \dots, e_n \in A \text{ tq } \begin{cases} e_1 + \dots + e_n = 1_A \\ e_i^2 = e_i & \forall i \\ e_i a = a \cdot e_i & \forall i, \forall a \\ e_i \cdot e_j = 0 & \forall i \neq j \end{cases} \right)$$

Alors $A \simeq e_1 A \times \dots \times e_n A$.

- Algèbre de groupe

Soit M un monoïde (pas forcément comm.)
(par exemple, un groupe G)

soit A un anneau (de coefficient)
(par exemple, un corps $\mathbb{K}$)

Déf $A[M]$ est l'anneau suivant :

- Comme un groupe abelien
$A[M]$ est la somme directe $A^{(M)}$

i.e.
$$A[M] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{m_i} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in A \\ m_i \in M \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

- La loi de multiplication est determinée
par $\boxed{\delta_m \cdot \delta_{m'} := \delta_{mm'}}$

i.e.
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{m_i}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n'} a_j' \delta_{m_j'}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} a_i a_j' \delta_{m_i m_j'}$$

On peut vérifier que $A[M]$ est une A-algèbre avec le morphisme structural

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A[M] \\ a & \longmapsto & a\delta_e \end{array}$$

où e est l'élément neutre de M.

<u>Exo</u> Vérifier que $A[M]$ est une A-algèbre

- $A \xrightarrow{f} A[M]$ est un morphisme :

$$f(a \cdot a') = aa'\delta_e = (a\delta_e)\cdot(a'\delta_e) = f(a)f(a')$$

- <u>Associativité</u> :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{m_i}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n'} b_j \delta_{m'_j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n''} c_k \delta_{m''_k}\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'} a_i b_j \delta_{m_i m'_j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n''} c_k \delta_{m''_k}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'}\sum_{k=1}^{n''} (a_i b_j) c_k \, \delta_{(m_i m'_j) m''_k}$$

$= \ldots$

<u>Exemple</u> (i) $N := (\mathbb{N}, 0, +)$ le monoïde

Soit $\mathbb{K}$ un corps (ou A un anneau)

$$\mathbb{K}[N] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots\}$$

La loi de multiplication: $\forall m, m' \in \mathbb{N}$

$$\delta_m \cdot \delta_{m'} = \delta_{m+m'}$$

plus généralement $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{m_i}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n'} \mu_j \delta_{m_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n'} \lambda_i \mu_j \, \delta_{m_i + m_j}$$

<u>Affirmation</u>

la $\mathbb{K}$-alg. des polynôme à une variable

$$\mathbb{K}[\mathbb{N}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[T]$$

$$\delta_m \longleftrightarrow T^m \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\delta_0 \longleftrightarrow T^0 = 1$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

(ii) $\mathbb{N}^n := \{ (m_1, \dots, m_n) \mid m_i \in \mathbb{N} \}$

$$\mathbb{K}[\mathbb{N}^n] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \{ \delta_{m_1, \dots, m_n} \mid m_i \in \mathbb{N} \}$$

la loi $\bullet$: $\delta_{m_1, \dots, m_n} \cdot \delta_{m_1', \dots, m_n'} := \delta_{m_1+m_1', \dots, m_n+m_n'}$

<u>Exo</u> On a un isom. canonique de $\mathbb{K}$-algèbres

$$\mathbb{K}[\mathbb{N}^n] \simeq \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$$
$$\delta_{m_1, \dots, m_n} \longleftrightarrow T_1^{m_1} \cdots T_n^{m_n}$$

(iii) $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un groupe cyclique d'ordre n avec générateur σ

$\mathbb{K}$ corps

$$\mathbb{K}[G] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \{ \delta_e, \delta_\sigma, \delta_{\sigma^2}, \dots, \delta_{\sigma^{n-1}} \}$$

le produit : $\delta_{\sigma^i} \cdot \delta_{\sigma^j} = \delta_{\sigma^i \cdot \sigma^j} = \delta_{\sigma^{i+j}}$

(si on utilise la notation $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1} \}$)

$$\left(\text{alors} \quad \delta_{\bar{i}} \cdot \delta_{\bar{j}} = \delta_{\bar{i}+\bar{j}} = \delta_{\overline{i+j}} \right)$$

<u>Affirmation</u>

$$\mathbb{K}[G] \simeq \mathbb{K}[T] / (T^n - 1)$$

$$\delta_e \longleftrightarrow 1$$

$$\delta_\sigma \longleftrightarrow T$$

$$\vdots$$

$$\delta_{\sigma^i} \longleftrightarrow T^i.$$

On vérifie : $T^n = (\delta_\sigma)^n = \underbrace{\delta_\sigma \cdot \cdots \cdot \delta_\sigma}_{n \text{ fois}} = \delta_{\sigma^n} = \delta_e = 1$

(iv) Si G est un gp cyclique libre $(\cong \mathbb{Z})$
$\quad \|$ avec générateur σ
$\langle \sigma \rangle$

$$\mathbb{K}[G] = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \{ \cdots, \delta_{\sigma^{-1}}, \delta_e, \delta_\sigma, \delta_{\sigma^2}, \cdots \}$$

la loi $\quad \delta_{\sigma^i} \cdot \delta_{\sigma^j} = \delta_{\sigma^{i+j}} \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}.$

<u>Exo</u> $\quad \mathbb{K}[G] \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[T, T^{-1}]$

$$\text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}$$

$$\delta_{\sigma^i} \longleftrightarrow T^i \quad \left\{ \frac{f(T)}{T^n} \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ f(T) \in \mathbb{K}[T] \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{c} \wr\!\wr \\ \mathbb{K}[T_1, T_2] / (T_1 T_2 - 1) \end{array} \right)$$

Suite d'Exemples d'anneau :

- **Anneaux des fonctions**

Soit X un
- ensemble
- espace topologique
- variété différentielle
- variété algébriques.

Soit A
- un anneau
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Alors

$$A^X := \{\text{fonctions à valeurs dans } A \text{ sur } X\}$$

$$\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}) \text{ ou } \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C}) := \{\text{fonctions } \mathcal{C}^0 \text{ sur } X\}$$

$$\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}) := \{\text{fonctions } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } X\}.$$

est un anneau. $\left(\underline{\text{Rq}} \quad A^X = \prod_{x \in X} A \right)$

avec la loi "point par point".

- Soit G un groupe compact de Lie
  (e.g. SO_n, U_n, $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, ...)

$$\mathcal{F} := \left\{ \text{les fonctions} \,\middle|\, \begin{matrix} \mathcal{C}^0 \\ \mathcal{C}^\infty \\ \vdots \end{matrix} \text{ sur } G \right\}$$

est muni d'une structure d'anneau
<u>différente</u> de celle dans l'exemple précédent

$\forall f, g \in \mathcal{F}$, on définit le <u>produit de convolution</u>

$$(f * g)(x) = \int_G f(x \cdot y^{-1})\, g(y)\, d\mu_G(y)$$

où μ est (la mesure d'Haar) sur G
une mesure naturelle
avec $\mu(G)$ fini.

<u>Attention</u> $(\mathcal{F}, *)$ n'est pas commutatif en générale.

- <u>Cas spécial</u> : G gp fini,

$$\mathcal{F} = \{ \text{fonctions } f : G \longrightarrow \mathbb{K} \}$$

ou un anneau A quelconque

avec le produit

$$f * g\,(x) := \int_G f(xy^{-1})\, g(y)\, d\mu_G(y)$$

$\forall f, g \in \mathcal{F}$
$\forall x \in G$.

- $\int_G$ = la somme sur G

- $d\mu_G$ = la mesure de comptage

On note $\forall x \in G$, $\underset{\mathcal{F}}{\delta_x}$:= la fonction d'indicatrice de $\{x\}$

i.e. $\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \{ \delta_x \mid x \in G \}.$$

la loi :

$$\forall g, g' \in G, \quad \delta_g * \delta_{g'}(x) = \int_G \delta_g(xy^{-1}) \delta_{g'}(y) \, d\mu_G(y)$$

$$= \sum_{y \in G} \delta_g(xy^{-1}) \cdot \delta_{g'}(y)$$

$$= \delta_g(x g'^{-1})$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x = gg' \\ 0 & \text{si } x \neq gg' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \delta_g * \delta_{g'} = \delta_{gg'}$$

<u>conclusion</u>

$$(F, *) = (\mathbb{K}[G], \cdot)$$

- <u>Localisation</u>

A : anneau commutatif unitaire.

S : un sous-ensemble de A stable par $\cdot$

(<u>système multiplicatif</u>)

$$S^{-1}A := \left\{ (a,s) \;\middle|\; \begin{array}{l} s \in S \\ a \in A \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

où

$$(a,s) \sim (a',s') \iff \exists s'' \in S, \text{ tq } \quad s''(sa'-s'a)=0$$

<u>Exo</u> : c'est une relation d'équivalence.

<u>Notation</u> $\frac{a}{s} := [(a,s)]$.

<u>Observation</u> $S^{-1}A$ est un anneau comm. unitaire pour les lois

- $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} := \frac{as'+a's}{ss'}$

- $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} := \frac{aa'}{ss'}$

<u>Exo</u> : Vérifier que $+$ et $\cdot$ sont bien définies.

<u>Exemples</u> :

- $\mathbb{Q} \cong S^{-1}\mathbb{Z}$ avec $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

- <u>Corps des fractions</u> :

Soit A un anneau intègre

alors $S := A \setminus \{0\}$ est un système mult.

$\mathrm{Frac}(A) := S^{-1}A$ le corps des fractions de A.

$\left(\begin{array}{l} s \neq 0 \\ a \neq 0 \end{array} \quad \left(\frac{a}{s}\right)^{-1} = \frac{s}{a} \right)$

e.g. $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

$\mathrm{Frac}(\mathbb{K}[T]) = \mathbb{K}(T)$ fractions rationnelles

$\mathrm{Frac}(\mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]) = \mathbb{K}(T_1, \dots, T_n)$

- A : ann. comm. unitaire

$\mathfrak{p}$: idéal premier de A

(Rappel : premier $\Leftrightarrow A/\mathfrak{p}$ est intègre

$\Leftrightarrow \forall x, y \notin \mathfrak{p},\ x \cdot y \notin \mathfrak{p}$

$(\mathfrak{p} \underset{\neq}{\triangleleft} A)$)

Donc $S := A \setminus \mathfrak{p}$ est un système mult.

$A_{\mathfrak{p}} := S^{-1}A$ l'anneau local de A en $\mathfrak{p}$.

(e.g. $\mathrm{Frac}(A) = A_{(0)}$

si intègre)

Exo. $A_{\mathfrak{p}}$ admet un unique idéal maximal.

(Rappel : Un idéal $\mathfrak{m} \triangleleft A$ est maximal $\Leftrightarrow$ $A/\mathfrak{m}$ est un corps
$\Leftrightarrow$ $\forall \mathfrak{p}$ idéal premier de A
si $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$ alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$)

Exemple $(p) = p\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ idéal premier $\Leftrightarrow$ p nb premier

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \begin{array}{l} p \nmid m \\ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

l'unique idéal maximal est $p\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \begin{array}{l} p \nmid m \\ p \mid n \end{array} \right\}$.

$$\mathbb{Z}_{(p)} / p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Exo : $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} := $ l'unique idéal max. de $A_{\mathfrak{p}}$

$$A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p}) =: \kappa(\mathfrak{p})$$

(le corps residuel en $\mathfrak{p}$).

(e.g. $\kappa((p)) = \mathbb{F}_p$.)

§ Anneaux spéciaux

Tout anneau est supposé comm et unitaire.

Déf. Un ann comm. unitaire A est principal

si A est intègre

et $\forall I \triangleleft A \quad \exists a \in A$ tq $I = (a) = aA$

Exemples $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{K}[X]$.

Non-exemples: $K[X_1, X_2]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ....

$(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3}) = 2 \cdot 2$

Prop. Un anneau euclidien est principal.

⚠ $\exists$ exemple d'ann. principal non euclid.

Déf Un ann. factoriel est un anneau qui admet une factorisation unique pour chaque élt

Rappel:
- irréductible
- Existence: $x = u p_1 p_2 \cdots p_r$ $\quad u \in A^\times$, p_i irréductibles
- Unicité: deux factorisations sont liées

| par permutations et multiplications des inversibles
en chaque facteur.

<u>Prop</u> A principal $\Rightarrow$ factoriel.

<u>Thm</u> A factoriel

$\Rightarrow A[T]$ est factoriel.

<u>Cor</u>. A factoriel $\Rightarrow$ $A[T_1, \ldots, T_n]$ factoriel.

<u>Exemple</u> $\mathbb{K}[T_1, \ldots, T_n]$ factoriel.

(si $n \geq 2$, n'est pas principal)